

**SITEBSi srl**  
**Rassegna  
del bitume**

**RIVISTA DEL SITEB-ASSOCIAZIONE ITALIANA BITUME ASFALTO STRADE**

ESTRATTO DAL N° **24/95**

**Applicazione dell'analisi fattoriale ai materiali stradali**

*Umberto Bonvino*  
*Università di Bari*

# Applicazione dell'analisi fattoriale ai materiali stradali

## Application of the factor analysis to asphalt mix

Umberto Bonvino  
Università di Bari

### Riassunto

*Il progetto delle pavimentazioni stradali richiede la conoscenza approfondita di un grande numero di variabili; esso, tuttavia, può essere risolto in maniera soddisfacente anche con un numero inferiore di "nuove" variabili, funzioni di quelle originarie, utilizzando le tecniche dell'analisi statistica multivariata.*

### Summary

*Some techniques of multivariate (statistica) analysis are applied to the asphalt concrete of varying densities. In particular the factor analysis is utilized; it is a (statistica) technique used to identify a relatively small number of factors that can be used to represent relationships among sets of many interrelated variables. Variables such as consumer ratings of products in a survey can be expressed as a function of factors such as product quality and performance. Factor analysis helps identify these underlying, not directly observable constructs.*

### 1. Introduzione

In precedenti ricerche sperimentali è stato confermato che uno studio approfondito sui materiali stradali, con particolare riguardo a quelli componenti le pavimentazioni, richiede l'esame di numerosi parametri quali, ad esempio: il tipo e la provenienza del bitume, l'analisi granulometrica e l'origine degli elementi litici, la densità delle miscele, le loro resistenze meccaniche con le rispettive deformazioni, la velocità di applicazione dei carichi, la temperatura, ecc. Un siffatto modo di procedere se accresce la caratterizzazione del problema

in esame genera, purtroppo, notevole difficoltà quando si vogliono confrontare l'insieme delle risultanze numeriche provenienti da conglomerati diversi. -Per tentare di risolvere il contrasto tra la necessaria sinteticità (utilizzo di pochi parametri) e la conoscenza più approfondita del fenomeno multidimensionale (utilizzo di molti parametri) è opportuno ricercare metodi di analisi che, utilizzando il complesso delle informazioni iniziali, consentano di individuare quelle grandezze il cui contenuto d'informazione è prevalente, così da eliminare quelli ridondanti e poco o nulla discriminanti. Per raggiungere questo obiettivo si sono utilizzate alcune procedure dell'analisi fattoriale applicate agli insiemi numerici di dati provenienti dalla sperimentazione sui conglomerati bituminosi a diversa densità (Tab. 1).

### 2. L'analisi fattoriale

Le correlazioni tra le variabili osservate possono essere spiegate ipotizzando che ciascuna di esse sia funzione lineare di variabili latenti  $F_j$ , dette "fattori comuni" (comuni, dunque, a tutte le variabili osservate o a gruppi di esse, ma fra loro anche correlate), e di un fattore presente per ciascuna variabile denominato, "fattore unico". La somma delle parti di varianza della generica variabile osservata ( $Z_j$ ), spiegata dai fattori comuni  $F_j$ , è detta "comunalità", mentre il fattore unico spiega la varianza rimanente, detta unicità ( $U_j$ ). Nell'ipotesi che i fattori unici siano l'un l'altro incorrelati e quelli comuni abbiano varianza unitaria, siano indipendenti e incorrelati con i fattori unici, il modello dell'analisi fattoriale (nel seguito A.F.) trae origine dall'insieme di  $q$  variabili reali, standardizzate, tra loro linearmente correlate, rilevate su  $n$  unità statistiche ed è in grado di individuare le dimensioni fondamentali del campo descritto dalle  $q$  variabili considerate. L'obiettivo proposto è consistito nel verificare:

a) in quale misura ciascuna delle  $q$  variabili costituisce

Tab. 1 - I conglomerati bituminosi

Analisi granulometrica (% passante)			Composizione (%)		
U.N.I.	1° miscela	2° miscela		1° miscela	2° miscela
15	100,0	100,0	pietrischetto	-	-
10	93,8	89,6	graniglia	60	-
5	59,6	54,5	sabbia	38	50
2	34,3	30,0	argilla espansa 3/8	-	30
0,40	15,0	13,8	argilla espansa 8/12	-	17
0,18	9,4	9,4	cemento P325	2	3
0,075	7,7	7,8			
Massa volumica (daN/m3)			Test Marshall		
	1° miscela	2° miscela		1° miscela	2° miscela
	2.670	1.430	costipamento (colpi)	75	75
			stabilità (daN)	1.385	1.164
			scorrimento (mm)	2,4	1,5
			peso volume (daN/m3)	2.380	1.180
			porosità (%)	3,50	1,60
			K	-	0,00302
			bitume ottimo (%)	5,50	6,50
Bitume					
densità 25/25	(°C)	1,020			
penetrazione	(dmm)	86			
rammollimento	(°C)	47,5			
volatilità	(%)	0,19			
I.P.		-0,48			

una ripetizione della descrizione effettuata dalle rimanenti q-1,

b) se esiste la possibilità di raggiungere la stessa efficacia descrittiva con un numero  $p < q$  di variabili "non osservate" dette fattori. Il modello classico prevede p fattori comuni a tutte le q variabili piu' un fattore specifico per ogni variabile. In simboli:

$$(1) \quad Z = FS' + WC$$

dove:

$$(2) \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1q} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nq} \end{pmatrix}$$

è la matrice nxq delle variabili osservate standardizzate;

(3)

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1q} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nq} \end{pmatrix}$$

è una matrice nxp le cui colonne (di media zero e varianza unitaria) contengono i p fattori comuni;

(4)

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1q} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nq} \end{pmatrix}$$

è la matrice qxp dei coefficienti di correlazione tra le q variabili  $z_j$  ed i p fattori comuni  $f_k$  (per  $j=1,2,\dots,q$  e  $k=1,2,\dots,p$ );

$$(5) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nq} \end{pmatrix}$$

è una matrice  $n \times q$  che contiene i  $q$  fattori specifici, uno per ogni variabile  $z_j$ ;

$$(6) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{qq} \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonale  $n \times q$  che contiene i coefficienti dei fattori specifici.

Le procedure seguite per la determinazione della soluzione fattoriale riguardano la determinazione dei fattori comuni, mentre i fattori specifici saranno ottenuti per residuo attraverso l'espressione:

$$(7) \quad \mathbf{WC} = \mathbf{Z} - \mathbf{FS}'$$

essendo  $S'$  la trasposta di  $S$ .

Per giungere ad una soluzione fattoriale del problema si è proceduto per fasi:

- 1) identificazione della matrice di correlazione ( $R$ );
- 2) esame della significatività dei coefficienti di correlazione;
- 3) verifica, tramite alcuni indicatori, dell'opportunità di eseguire l'analisi fattoriale sui dati disponibili;
- 4) estrazione ed individuazione del numero dei fattori;
- 5) rotazione dei fattori estratti per ottenere una loro più semplice identificazione.

### 3. La matrice di correlazione

Con i materiali indicati nella Tab. 1 si sono approntate sessanta serie di provini cilindrici (trenta per ciascuna miscela); ogni serie ha consentito di rilevare le sedici variabili statistiche  $q$  (parametri) le cui sigle sono elencate nella Tab. 2.

Tab. 2 - Parametri

q	variabili	sigla
1	Passante U.N.I. 10	UNI 10
2	Passante U.N.I. 2	UNI 2
3	Passante U.N.I. 0,40	UNI 0.40
4	Passante U.N.I. 0,18	UNI 0.18
5	Passante U.N.I. 0,075	UNI 0.075
6	Densità del conglomerato	DENSITA'
7	Stabilità Marshall	MARSHALL
8	Resistenza alla trazione indiretta (25°C)	RTI 25
9	Resistenza alla trazione indiretta (45°C)	RTI 45
10	Resistenza alla trazione indiretta (60°C)	RTI 60
11	Deformazione orizzontale (25°C)	SO 25
12	Deformazione orizzontale (45°C)	SO 45
13	Deformazione orizzontale (60°C)	SO 60
14	Deformazione verticale (25°C)	SV 25
15	Deformazione verticale (45°C)	SV 45
16	Deformazione verticale (60°C)	SV 60

Individuate le dimensioni fondamentali del campo descritto dalle sedici variabili considerate si è calcolata la matrice dei coefficienti di correlazione tra le  $q$  variabili originarie, standardizzate,  $z_j$  ( $j=1,2,\dots,q$ ), attraverso la (8).

$$(8) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{n} \mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1q} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{q1} & r_{q2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

I risultati numerici sono esposti in Tab. 3 che ha consentito le seguenti considerazioni ed il calcolo di alcuni indicatori volti a stabilire la correttezza dell'analisi fin qui eseguita.

- a) Il determinante della matrice delle correlazioni è prossimo al valore zero; appare quindi probabile il rifiuto dell'ipotesi di indipendenza tra le  $q$  variabili  $z_j$ . Come è noto, infatti, se le variabili sono scarsamente correlate tra di loro il  $\det(\mathbf{R})$  tende all'unità. Viceversa, quanto più esse sono tra loro correlate tanto più il  $\det(\mathbf{R})$  è, come nel caso che stiamo trattando, prossimo a zero.
- b) Le correlazioni tra le variabili sono molto forti.
- c) Oltre la metà dei coefficienti indicati è superiore in valore assoluto a 0,4.
- d) L'applicazione del test di sfericità di Bartlett (9), basato su una trasformazione  $l^2$  con  $q(q-1)/2$  gradi di libertà del determinante della matrice di correlazione, conferma l'opportunità di continuare l'analisi fattoriale. Il valore di detto coefficiente è risultato: 4.013,27.

$$(9) \quad \mathbf{K}_{\text{Bartlett}} = - \left[ (n-1) - \frac{1}{6} (2q+5) - \frac{2}{3} \right] \ln |\mathbf{R}|$$

variabili	DENSITA'	MARSHALL	RTI 25	RTI 45	RTI 60	SO 25	SO 45	SO 60	SV 25	SV 45	SV 60	UNI 0.075	UNI 0.18	UNI 0.40	UNI 10	UNI 2
DENSITA'	1,00000	0,84603	0,94371	0,90899	0,54667	0,96081	0,74935	0,43037	0,86969	0,23052	-0,08198	-0,02224	-0,27532	0,55024	0,61025	0,53040
MARSHALL	0,84603	1,00000	0,97428	0,98143	0,89666	0,95979	0,97347	0,83456	0,99893	0,69328	0,45646	0,08553	-0,21317	0,58934	0,47073	0,40614
RTI 25	0,94371	0,97428	1,00000	0,99051	0,78874	0,99833	0,91770	0,70123	0,98366	0,52458	0,25051	0,04927	-0,25136	0,59792	0,54774	0,47450
RTI 45	0,90899	0,98143	0,99051	1,00000	0,83225	0,98490	0,95573	0,75323	0,98731	0,60820	0,32565	0,08142	-0,23581	0,56770	0,51567	0,44242
RTI 60	0,54667	0,89666	0,78874	0,83225	1,00000	0,75466	0,93408	0,99083	0,87807	0,88105	0,78504	0,19352	-0,12759	0,52732	0,27353	0,22901
SO 25	0,96081	0,95979	0,99833	0,98490	0,75466	1,00000	0,89642	0,66144	0,97173	0,47811	0,19600	0,03773	-0,25896	0,59444	0,56213	0,48863
SO 45	0,74935	0,97347	0,91770	0,95573	0,93408	0,89642	1,00000	0,89015	0,96595	0,81466	0,57109	0,13011	-0,17701	0,51448	0,39267	0,33494
SO 60	0,43037	0,83456	0,70123	0,75323	0,99083	0,66144	0,89015	1,00000	0,81049	0,91835	0,86139	0,20760	-0,09162	0,47987	0,19935	0,16250
SV 25	0,86969	0,99893	0,98366	0,98731	0,87807	0,97173	0,96595	0,81049	1,00000	0,66136	0,41593	0,07816	-0,22218	0,59353	0,48829	0,42151
SV 45	0,23052	0,69328	0,52458	0,60820	0,88105	0,47811	0,81466	0,91835	0,66136	1,00000	0,90031	0,19424	-0,00899	0,26423	0,04369	0,03102
SV 60	-0,08198	0,45646	0,25051	0,32565	0,78504	0,19600	0,57109	0,86139	0,41593	0,90031	1,00000	0,22763	0,06393	0,21793	-0,11934	-0,11934
UNI 0.075	-0,02224	0,08553	0,04927	0,08142	0,19352	0,03773	0,13011	0,20760	0,07816	0,19424	0,22763	1,00000	-0,05056	-0,04923	0,01366	-0,11444
UNI 0.18	-0,27532	-0,21317	-0,25136	-0,23581	-0,12759	-0,25896	-0,17701	-0,09162	-0,22218	-0,00899	0,06393	-0,05056	1,00000	-0,05290	-0,27230	-0,13308
UNI 0.40	0,55024	0,58934	0,59792	0,56770	0,52732	0,59444	0,51448	0,47987	0,59353	0,26423	0,21793	-0,04923	-0,05290	1,00000	0,36524	0,42805
UNI 10	0,61025	0,47073	0,54774	0,51567	0,27353	0,56213	0,39267	0,19935	0,48829	0,04369	-0,12078	0,01366	-0,27230	0,36524	1,00000	0,29619
UNI 2	0,53040	0,40614	0,47450	0,44242	0,22901	0,48863	0,33494	0,16250	0,42151	0,03102	-0,11934	-0,11444	-0,13308	0,42805	0,29619	1,00000

Tab. 3 - Matrice delle correlazioni

variabili	DENSITA'	MARSHALL	RTI 25	RTI 45	RTI 60	SO 25	SO 45	SO 60	SV 25	SV 45	SV 60	UNI 0.075	UNI 0.18	UNI 0.40	UNI 10	UNI 2
DENSITA'	<b>0,85399</b>															
MARSHALL	0,20800	<b>0,88763</b>														
RTI 25	-0,66209	0,10102	<b>0,81924</b>													
RTI 45	0,02158	0,05564	-0,12963	<b>0,90726</b>												
RTI 60	0,36903	-0,08520	-0,52188	-0,14226	<b>0,82666</b>											
SO 25	-0,07527	0,07737	-0,41670	-0,06235	0,24911	<b>0,94834</b>										
SO 45	-0,02435	0,04499	0,01284	-0,75643	-0,06971	-0,00716	<b>0,85201</b>									
SO 60	0,03874	0,10703	0,12650	0,07188	-0,82686	-0,30287	0,06552	<b>0,86520</b>								
SV 25	0,12399	-0,90443	-0,49321	0,01863	0,28472	-0,01448	-0,03862	-0,10657	<b>0,85036</b>							
SV 45	0,00557	-0,15042	0,09206	0,29586	0,21477	0,03455	-0,84488	-0,15030	0,07558	<b>0,83173</b>						
SV 60	-0,60077	-0,03533	0,65472	0,08491	-0,25009	0,09982	0,00089	-0,33103	-0,30327	-0,07611	<b>0,73297</b>					
UNI 0.075	0,09313	0,03330	-0,23579	-0,07773	0,05032	0,20394	0,11746	0,03261	0,05862	-0,11689	-0,15954	<b>0,54578</b>				
UNI 0.18	-0,14085	-0,19416	-0,04724	-0,19762	0,00712	0,03357	0,18803	0,04973	0,19256	-0,11231	-0,12265	0,07887	<b>0,65414</b>			
UNI 0.40	-0,18135	-0,06200	0,02031	0,23989	-0,00974	0,03838	-0,28379	-0,00582	0,04463	0,25598	-0,02505	0,08430	-0,12184	<b>0,91425</b>		
UNI 10	0,05657	-0,23013	-0,29889	-0,12917	0,41920	0,14356	0,01477	-0,28487	0,32341	0,09540	-0,23393	0,02197	0,21378	-0,02160	<b>0,77384</b>	
UNI 2	0,04051	-0,22711	-0,12526	0,05497	0,10166	-0,07889	0,03199	-0,09191	0,26191	-0,08171	-0,01641	0,06617	0,04849	-0,19287	0,12562	<b>0,88482</b>

Tab. 4 - Anti immagine della matrice di correlazione

L'ipotesi nulla è che le  $q$  variabili  $z_j$  siano tra loro indipendenti. Se il valore calcolato per  $K_{Bartlett}$  è maggiore del valore di  $\chi^2$  per  $q(q-1)/2$  gradi di libertà ed al livello di probabilità prescelto  $\alpha$ , si dovrà rifiutare l'ipotesi nulla e procedere all'applicazione dell'analisi fattoriale; se  $K_{Bartlett} < \chi^2_{\alpha}$ , significa che le  $q$  variabili costituiscono le dimensioni minime del fenomeno considerato e l'analisi fattoriale non potrebbe fare altro che confermarle (in tal caso appare inutile procedere con l'A.F.). Nel caso particolare, il valore numerico di  $K_{Bartlett}$  indica significative interdipendenze tra le variabili al livello di probabilità del 5%; infatti in corrispondenza di 120 gradi di libertà è risultato  $\chi^2_{0,05} \ll K_{Bartlett}$ .

e) La determinazione di altri due indicatori, l'indice  $KMO=0,85509$  e il coefficiente  $MSA$ , quest'ultimo riportato sulla diagonale della matrice di Tab.4, ha confermato la validità dell'analisi fattoriale ai dati sperimentali.

f) Infine, il calcolo del quadrato del coefficiente di correlazione multipla tra ciascuna variabile e le rimanenti ha consentito di ottenere le "comunalità". Queste ulteriori grandezze, riportate nella tabella dei dati finali statistici, confermano la presenza di un legame lineare esistente tra le variabili.

#### 4. Determinazione del numero dei fattori

Un criterio per valutare se il numero  $p$  di fattori comuni considerati è sufficiente a racchiudere l'informazione fornita dalle  $q$  variabili originarie è quello di fissare una soglia minima  $Q$  di varianza delle variabili  $z_j$  e considerare solo quei fattori la cui quota di varianza cumulata è maggiore di  $Q$ . Se esistono deboli correlazioni tra le colonne di  $Z$ , potrà verificarsi che la % di varianza spiegata da  $p$  fattori ( $p < q$ ) sia bassa (ad esempio  $< 50\%$ ). In questi casi ogni fattore comune è fortemente correlato con una o, al max, due tra le  $q$  variabili originarie. Nel caso in esame si è ritenuto opportuno raggiungere una soglia minima dell'80%.

#### 5. Estrazione dei fattori.

I metodi di estrazione dei fattori si propongono l'obiettivo di ricercare soluzioni fattoriali che meglio riproducono la matrice di correlazione osservata. Tra quelli adoperati nella presente ricerca si menzionano:

- assi fattoriali principali (PAF),
- componenti principali (PC),
- massima verosimiglianza (ML).

Poiché la matrice  $R$  delle correlazioni è simmetrica ed è definita positiva, utilizzando inizialmente l'analisi delle componenti principali si sono calcolati i relativi autovalori e, naturalmente, le percentuali di varianze spiegate. Le risultanze numeriche sono riportate nella Tab.5 e mostrano che le C.P. sono tre.

n	$\lambda$	$\Delta$	% Varianza spiegata	% Varianza cumulata
I	9,593335	6,938966	59,96	59,96
II	2,654369	1,562153	16,59	76,55
III	1,092216	0,264734	6,83	83,37
IV	0,827482	0,137574	5,17	88,55
V	0,689908	0,089285	4,31	92,86
VI	0,600623	0,155414	3,75	96,61
VII	0,445209	0,366586	2,78	99,39
VIII	0,078623	0,061300	0,49	99,89
IX	0,017323	0,016768	0,11	99,99
X	0,000555	0,000355	0,00	100,00
XI	0,000200	0,000136	0,00	100,00
XII	0,000064	0,000006	0,00	100,00
XIII	0,000058	0,000030	0,00	100,00
XIV	0,000028	0,000021	0,00	100,00
XV	0,000007	0,000005	0,00	100,00
XVI	0,000002		0,00	100,00

Tab. 5 - Autovalori matrice di correlazione

Esse spiegano l'83,37% della varianza totale (quindi al di sopra della soglia minima prefissata); il contributo delle rimanenti componenti è, invece, molto esiguo. Secondo alcuni Autori è opportuno che il numero delle P.C. sia pari a quello degli autovalori maggiori dell'unità. Si è poi determinata la "struttura" delle tre componenti principali fornita dalla matrice fattoriale ( $R^*$ ) e dai valori delle comunalità.

Le informazioni ottenute permettono ulteriori considerazioni che costituiscono un primo risultato pratico dell'analisi effettuata. Esse risultano agevoli ove si tenga presente che per un dato parametro la somma dei quadrati delle coordinate relative ai primi tre assi rappresenta il quadrato del coefficiente di correlazione multipla fra il parametro stesso ed i tre assi. Quanto più questo indicatore è vicino all'unità tanto più il parametro in esame è influente sui primi tre assi ed è poco importante nei riguardi dei rimanenti  $p-3$  assi trascurati. Conseguentemente esso contribuisce molto a discriminare fra loro i conglomerati bituminosi; tale aspetto si è riscontrato soprattutto per i parametri legati



Tab. 6 - Matrice fattoriale

metodo variabili	P. C.				P. A. F.			
	asse 1	asse 2	asse 3	Comunalità	Fattore 1	Fattore 2	Fattore 3	Comunalità
DENSITA'	0,82225	-0,52641	-0,02683	0,95392	0,82261	-0,56172	-0,07357	0,99763
MARSHALL	0,99324	-0,02484	0,00885	0,98722	0,99545	-0,04222	-0,03104	0,99367
RTI 25	0,96152	-0,23488	-0,01060	0,97980	0,96338	-0,26058	-0,05041	0,99854
RTI 45	0,97614	-0,14524	-0,02254	0,97445	0,97786	-0,16845	-0,09281	0,99320
RTI 60	0,91846	0,37182	0,01340	0,98200	0,92112	0,37023	0,04034	0,98717
SO 25	0,94558	-0,28641	-0,01419	0,97636	0,94725	-0,31397	-0,05495	0,99888
SO 45	0,97812	0,13344	-0,00552	0,97456	0,97997	0,12009	-0,09635	0,98405
SO 60	0,86072	0,48579	0,02229	0,97733	0,86389	0,48992	0,05470	0,98931
SV 25	0,99079	-0,06819	0,00483	0,98634	0,99296	-0,08729	-0,03535	0,99484
SV 45	0,71558	0,64822	0,02794	0,93302	0,71503	0,64278	-0,07777	0,93049
SV 60	0,49400	0,83363	0,05314	0,94180	0,49815	0,85936	0,09941	0,99653
UNI 0.075	0,11405	0,31432	-0,65594	0,54206	0,10427	0,21181	-0,17259	0,08552
UNI 0.18	-0,22673	0,27900	0,64974	0,55141	-0,20555	0,19630	0,18379	0,11457
UNI 0.40	0,62641	-0,18811	0,32109	0,53088	0,60615	-0,17186	0,53617	0,68443
UNI 10	0,49015	-0,50605	-0,23465	0,55140	0,45831	-0,41133	-0,05541	
UNI 2	0,42810	-0,48828	0,27511	0,49737	0,39926	-0,38758	0,22578	
Autovalori	9,593	2,654	1,092		9,540	2,495	0,457	
% varianza	59,96	16,59	6,83		59,60	15,60	2,90	
% varianza cum.	59,96	76,55	83,37		59,60	75,20	78,10	

alle resistenze meccaniche ed alle deformazioni. Al contrario, se i valori numerici si discostano notevolmente dall'unità, il relativo parametro è influente sugli assi che sono stati trascurati e, quindi, contribuisce poco a discriminare gli elementi del campione. Si è così riscontrato che tali parametri sono legati alla granulometrica degli elementi litici con particolare riguardo alle pezzature maggiori. Naturalmente dal gruppo di parametri molto correlati fra loro si sceglierà come rappresentativo quello avente la più elevata comunalità; per valori pressoché uguali prevarrà il criterio di conservare il parametro determinabile più facilmente in laboratorio. Nel dettaglio la matrice R\* consente di identificare le componenti principali: evidente è la presenza di legami molto forti tra i valori della stabilità Marshall, della trazione indiretta (a 25°C e 45°C) e delle deformazioni verticali (a 25°C). Ne deriva che è possibile attribuire alle informazioni emerse un significato fisico. Così, ad esempio, il primo asse misura essenzialmente la resistenza meccanica del conglomerato bituminoso poiché ad esso sono fortemente correlate le risultanze emerse dalle prove di stabilità Marshall e di resistenza alla trazione indiretta; quest'ultima, però, appare maggiormente influenzata dalle temperature di +25°C e +45°C rispetto a quella di +60°C. Inoltre, sempre al primo asse è molto correlata,

oltre la densità, la deformazione verticale a +25°C e quelle orizzontali. Il secondo asse, invece, fornisce informazioni soprattutto sulle deformazioni verticali alla temperatura più elevata, +60°C. Il terzo asse, infine, misura solo le caratteristiche dimensionali della miscela granulometrica in corrispondenza delle frazioni più piccole: UNI 0,18 e 0,075. In generale si conferma che i parametri maggiormente correlati con i tre assi principali, e quindi più idonei degli altri a discriminare i conglomerati bituminosi, sono le caratteristiche di resistenza e deformazione seguite da quelle granulometriche.

Una delle basi dell'A.F. è che la correlazione osservata tra le variabili è dovuta all'azione dei fattori comuni. Perciò le correlazioni stimate tra i fattori e le variabili possono essere usate per stimare le correlazioni tra le stesse variabili. In generale, se i fattori sono ortogonali, il coefficiente di correlazione stimato per le variabili i e j è:

$$(10) \quad r_{ij} = \sum_{f=1}^k r_{fi} r_{fj} = r_{1i} r_{1j} + r_{2i} r_{2j} + \dots + r_{ki} r_{kj}$$

dove k è il numero dei fattori comuni e  $r_{fi}$  è la correlazione tra il fattore f e la variabile i. Così, ad

variabili	DENSITA'	MARSHALL	RTI 25	RTI 45	RTI 60	SO 25	SO 45	SO 60	SV 25	SV 45	SV 60	UNI0.075	UNI 0.18	UNI 0.40	UNI 10	UNI 2
DENSITA'	<b>0,95392</b>	0,01651	0,02917	0,02929	-0,01245	0,03215	0,01518	-0,02104	0,01924	-0,01589	-0,04792	0,03184	0,07541	-0,05523	-0,06547	-0,07126
MARSHALL	0,82953	<b>0,98722</b>	0,01352	0,00849	-0,00648	0,01361	0,00533	-0,00848	0,01310	-0,00161	-0,01396	-0,01414	0,01320	-0,04035	-0,02660	-0,03362
RTI 25	0,91454	0,96076	<b>0,97980</b>	0,01758	-0,00690	0,02171	0,00850	-0,01203	0,01503	-0,01091	-0,02812	0,00648	0,03907	-0,04516	-0,04490	-0,04889
RTI 45	0,87969	0,97295	0,97293	<b>0,97445</b>	-0,00999	0,01996	0,02021	-0,01590	0,01037	0,00447	-0,03429	0,00096	0,04068	-0,06385	-0,04158	-0,04018
RTI 60	0,55912	0,90313	0,79564	0,84224	<b>0,98200</b>	-0,00714	-0,01382	0,01937	-0,00664	-0,01758	0,02065	-0,01932	-0,03179	0,01762	0,01465	0,01368
SO 25	0,92866	0,94618	0,97662	0,96494	0,76180	<b>0,97636</b>	0,00966	-0,01300	0,01540	-0,01248	-0,03161	0,01060	0,04456	-0,04720	-0,04962	-0,05211
SO 45	0,73417	0,96814	0,90920	0,93552	0,94791	0,88676	<b>0,97456</b>	-0,01644	0,00597	0,02839	-0,02305	-0,02701	0,01112	-0,07136	-0,02053	-0,01712
SO 60	0,45141	0,84304	0,71327	0,76912	0,97147	0,67444	0,90659	<b>0,97733</b>	-0,00929	-0,01309	0,03004	-0,02864	-0,04648	0,02492	0,02853	0,02510
SV 25	0,85044	0,98583	0,96863	0,97694	0,88471	0,95634	0,95999	0,81978	<b>0,98634</b>	-0,00356	-0,01694	-0,01024	0,01835	-0,04149	-0,03072	-0,03727
SV 45	0,24641	0,69489	0,53550	0,60372	0,89863	0,49059	0,78627	0,93144	0,66493	<b>0,93302</b>	0,00495	-0,07280	-0,04575	-0,07106	0,02753	0,03350
SV 60	-0,03406	0,47043	0,27863	0,35994	0,76440	0,22761	0,59414	0,83135	0,43287	0,89536	<b>0,94180</b>	-0,05589	-0,09117	0,04823	0,07141	0,06160
UNI 0.075	-0,05408	0,09967	0,04279	0,08046	0,21283	0,02713	0,15712	0,23624	0,08840	0,26704	0,28351	<b>0,54206</b>	0,31379	0,14907	-0,03710	0,17067
UNI 0.18	-0,35073	-0,22637	-0,29042	-0,27649	-0,09580	-0,30352	-0,18813	-0,04514	-0,24053	0,03676	0,15510	-0,36435	<b>0,55141</b>	-0,06702	0,13248	-0,07854
UNI 0.40	0,60548	0,62969	0,64309	0,63155	0,50970	0,64164	0,58583	0,45495	0,63502	0,33529	0,16970	-0,19830	0,01412	<b>0,53088</b>	0,03835	-0,02030
UNI 10	0,67572	0,49733	0,59264	0,55725	0,25888	0,61175	0,41320	0,17082	0,51901	0,01615	-0,19219	0,05076	-0,40478	0,32689	<b>0,55140</b>	-0,09619
UNI 2	0,60166	0,43976	0,52339	0,48260	0,21532	0,54074	0,35205	0,13740	0,45878	-0,00249	-0,18094	-0,28511	-0,05454	0,44835	0,39237	<b>0,49737</b>

Tab. 7 - Matrice delle correlazioni riprodotte



esempio, il coefficiente di correlazione stimato tra Marshall e UNI 0,075, basato sul modello a tre fattori, è:

$$r_{\text{Marshall/UNI0,075}} = (0,99324)(0,11405) + (-0,02484)(0,31432) + (0,00885)(-0,65594) = 0,09967$$

La Tab. 3 mostra che il coefficiente di correlazione osservato tra Marshall ed UNI=0,075 è, invece, leggermente inferiore: 0,08553, con una differenza rispetto al modello, chiamata "residuo" pari a 0,01414. I residui ed i coefficienti di correlazione stimati sono mostrati in Tab. 7; in particolare, i primi sono posti sopra la diagonale principale che riproduce le comunalità ed i secondi sono ubicati, invece, nella zona inferiore. Nel caso trattato vi sono solo venti residui (pari al 16%) sopra la diagonale con valore assoluto >0,05. Le dimensioni dei residui rappresentano un altro indicatore della bontà del modello assunto; infatti la presenza di residui in valore assoluto molto elevato induce a riconsiderare il lavoro fin qui svolto. Nel nostro caso le risultante numeriche appaiono decisamente incoraggianti.

Poiché dall'analisi delle C.P. è emerso che anche gli autovalori maggiori dell'unità sono tre, si è operato con un'analisi fattoriale a 3 fattori. Applicando il metodo PAF (il metodo ML non è risultato convergente) si sono ottenuti i coefficienti di correlazione fra variabili originarie e fattori, così come indicato nella stessa Tab. 6 (colonne P.A.F.). Confrontando i risultati emersi dall'applicazione dei due metodi si può affermare che, in

pratica, essi conducono alle medesime conclusioni, sia per i valori numerici quasi identici sia per come questi sono associati alle stesse variabili. Solo le percentuali della varianza (relativa e cumulata) ottenute dal metodo P.A.F. appaiono leggermente inferiori alle corrispondenti del metodo P.C.

## 6. Rotazione

Al fine di ottenere una migliore interpretabilità dei risultati e per semplificare le soluzioni fattoriali ottenute, si è proceduto alla rotazione dei fattori utilizzando metodi di rotazione ortogonale. Lo strumento di cui si dispone per compiere questa operazione è la matrice delle correlazioni  $S$  tra i fattori e le variabili originarie; essa rappresenta la "struttura fattoriale". L'identificazione dei fattori è tanto più agevole quanto più ciascuno di questi è fortemente correlato con un numero limitato di variabili che descrivono caratteri affini e debolmente correlato con le altre variabili. Da un punto di vista grafico i fattori estratti possono essere considerati come un sistema di assi che individua un iper spazio a  $p$  dimensioni nel quale ciascuna delle  $q$  variabili  $z_j$  corrisponde ad un punto. I coefficienti di correlazione tra il generico fattore  $k$  e le  $q$  variabili  $z_j$  sono le coordinate di queste ultime sull'asse  $k$ . Con la rotazione si individua un nuovo sistema di assi in cui ciascun punto, raffigurante una delle  $q$  variabili  $z_j$ , si dispone il più vicino possibile ad uno dei nuovi assi. Operativamente, date le  $q$  variabili  $z_j$  (per  $j=1,2,\dots,q$ ) si

Tab. 8 - Matrice fattoriale ruotata

metodo variabili	Varimax			Equamax			Quartimax		
	Fattore 1	Fattore 2	Fattore 3	Fattore 1	Fattore 2	Fattore 3	Fattore 1	Fattore 2	Fattore 3
DENSITA'	0,96442			0,93466			0,94021		
MARSHALL	0,78788			0,73249			0,95404		
RTI 25	0,89239			0,84489			0,98603		
RTI 45	0,84681			0,79349			0,97245		
RTI 60		0,86153			0,88829		0,76382		
SO 25	0,91180			0,86685			0,98616		
SO 45		0,71105			0,74944		0,89139		
SO 60		0,91534			0,93523			0,72085	
SV 25	0,81263			0,75864			0,96454		
SV 45		0,95260			0,95983			0,83267	
SV 60		0,96154			0,95204			0,94458	
UNI 0.075			0,66092			0,63512			0,67177
UNI 0.18			-0,67316			-0,70411			-0,65248
UNI 0.40	0,63275			0,64202			0,66845		
UNI 10	0,67505			0,63908			0,60790		
UNI 2	0,66163			0,68886			0,56756		

é proceduto alla determinazione dei tre fattori  $F_1$ ,  $F_2$  ed  $F_3$  in modo tale che ciascuna delle  $q$  variabili sia rappresentata su un sistema tridimensionale di assi cartesiani come un punto  $P$  le cui coordinate sono i coefficienti di correlazione tra detta variabile ed i tre fattori. Ruotando gli assi  $F_1$ ,  $F_2$  ed  $F_3$  si cerca di individuare una nuova tema di assi tale che le coordinate delle variabili risultino nel nuovo sistema prossime a zero rispetto ad uno dei due assi, facilitando in tal modo l'identificazione dei fattori. La Tab. 8 riporta i risultati delle calcolazioni effettuate utilizzando alcuni dei più noti metodi di rotazione dei fattori con assi ortogonali.

L'esame dei risultati numerici evidenzia l'equivalenza di un metodo rispetto all'altro, ma tutti consentono ulteriori considerazioni non rilevate precedentemente (Fig. 1).

a) Si conferma che il primo fattore é altamente correlato alla densità ed alla resistenza meccanica delle miscele fino a quando la temperatura a cui vengono sollecitati i conglomerati si mantiene al di sotto di quella che caratterizza il rammollimento dei bitumi. Tale aspetto non era emerso dalle matrici fattoriali dedotte con i metodi P.A.F. e P.C.

b) Il secondo fattore é altamente correlato con le deformazioni ottenute, però a temperature confrontabili, se non superiori, a quella di palla ed anello del legante.

c) Il terzo fattore, infine, caratterizza la granulometria delle miscele poiché si collega con le pezzature piu'

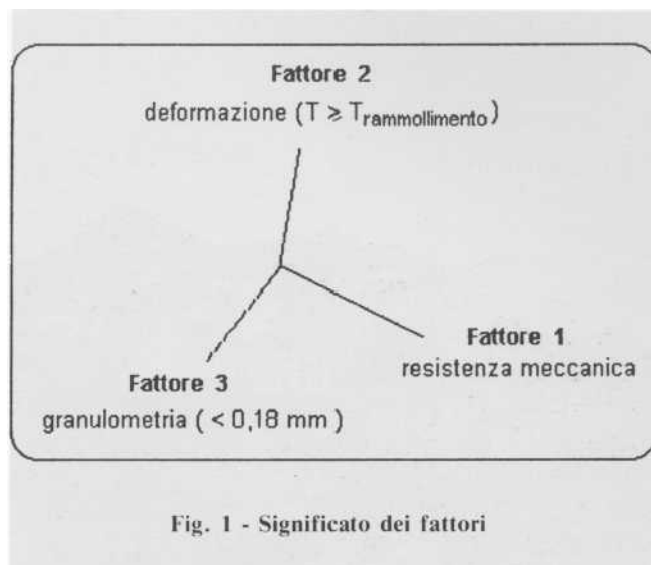


Fig. 1 - Significato dei fattori

piccole degli elementi litici confermando l'importanza del materiale di riempimento.

#### Bibliografia

- [1] A. Kostoris, *Elementi di analisi statistica multivariata*, F. Angeli, Milano 1981.
- [2] D.F. Morrison, *Multivariate statistica) methods*, M.Graw-Hill, New York 1976.